

Arithmétique des surfaces

30 avril 2026

Jérémy ALPACCA

RÉSUMÉ

Le point de départ de cet exposé consiste à introduire la notion de surface algébrique (selon le point de vue de Miranda). On est alors amené à s'intéresser à leur classification birationnelle. Pour ce faire, il convient de partir d'une idée assez naturelle : associer à une surface algébrique des invariants. Le cœur de cet exposé s'articulera alors en deux temps. D'une part, on étudiera des invariants tels que les plurigenres, l'irrégularité ou encore la dimension de Kodaira. D'autre part, on analysera leur rôle au sein de cette classification. Ce cheminement permettra notamment de faire émerger les surfaces K3, qui sont les objets centraux de ce groupe de lecture. Enfin, on présentera une famille importante d'invariants biréguliers : les nombres de Hodge. L'accent sera mis en particulier sur leur représentation à l'aide du diamant de Hodge, qui permet, au-delà de son aspect esthétique, de déduire directement des informations topologiques sur ces surfaces.

Table des matières

1	Surfaces algébriques	1
2	Diviseurs canoniques et premiers invariants numériques	1
2.1	Diviseurs canoniques d'une surface algébrique	1
2.2	La suite des plurigenres	2
2.3	La caractéristique d'Euler, l'irrégularité et le genre arithmétique	3
3	La dimension de Kodaira	3
3.1	Définition et propriétés générales	3
3.2	Classification des surfaces algébriques	4
4	D'autres invariants numériques : vers le diamant de Hodge	5
4.1	Nombres de Betti et nombre d'Euler	5
4.2	Quelques rudiments de théorie de Hodge	5

1 Surfaces algébriques

DÉFINITION 1.0.1. Soit X une variété complexe compacte connexe de dimension 2.

On dit que X est une **surface algébrique** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- ❶ pour tous $p \in X$ et $q \in X$, il existe une fonction méromorphe f sur X telle que $f(p) \neq f(q)$;
- ❷ pour tout $p \in X$ et pour tout $v \in T_p X \setminus \{0\}$, il existe une fonction méromorphe f sur X , holomorphe en p telle que $df_p(v) \neq 0$.

Remarque 1.0.2. Les conditions ❶ et ❷ de la définition 1.0.1 peuvent être plus synthétiquement reformulées en disant que le corps des fonctions méromorphes sur X sépare les points et les tangentes.

Notation 1.0.3. Si X désigne une surface algébrique, on note $\mathcal{M}(X)$ le corps des fonctions méromorphes sur X .

Remarque 1.0.4. Une surface algébrique X est un cas particulier de surface algébrique projective. En effet, la compacité de X entraîne l'existence d'un nombre fini de fonctions méromorphes $f_1, \dots, f_n$ sur X séparant les points et les tangentes. Par conséquent, via l'application
$$\begin{aligned} \Phi : X &\rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \\ x &\mapsto [1 : f_1(x) : \dots : f_n(x)] \end{aligned}$$
 X est plongée dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$. D'après le théorème de Chow, X est une surface algébrique projective.

2 Diviseurs canoniques et premiers invariants numériques

À partir de maintenant, sauf mention contraire, X désignera toujours une surface algébrique.

2.1 Diviseurs canoniques d'une surface algébrique

Avant de définir la notion principale de ce paragraphe, prenons le temps de rappeler ce qu'est un diviseur (de Weil, qui est aussi un diviseur de Cartier étant donné que X est lisse)

Rappel 2.1.1. Un **diviseur** de X est une somme formelle finie $D = \sum_i n_i C_i$ où les n_i sont des entiers relatifs et les C_i sont des courbes.

Rappel 2.1.2. Si $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$, alors le **diviseur de f** , noté $\text{div}(f)$, est le diviseur de X défini par :

$$\text{div}(f) = \sum_C \text{ord}_C(f) C.$$

Un diviseur de X est dit **principal** s'il est de la forme $\text{div}(f)$ avec $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$.

Rappel 2.1.3. Soient $D_1 = \sum_i n_i^{(1)} C_i$ et $D_2 = \sum_i n_i^{(2)} C_i$ deux diviseurs de X . On rappelle les relations $\sim$ et $\leq$ définies sur l'ensemble des diviseurs de X par :

$$D_1 \sim D_2 \text{ si } D_1 - D_2 \text{ est principal}$$

et :

$$D_1 \leq D_2 \text{ si } \forall i, n_i^{(1)} \leq n_i^{(2)}.$$

La relation $\sim$ (respectivement $\leq$) est une relation d'équivalence (respectivement une relation d'ordre) sur l'ensemble des diviseurs de X . De plus, lorsque $D_1 \sim D_2$, on dit que D_1 et D_2 sont **linéairement équivalents**.

Rappel 2.1.4. Le groupe de classes des diviseurs de X , noté $\text{Cl}(X)$, est le groupe des diviseurs de X quotienté par le sous-groupe des diviseurs principaux de X .

Les rappels étant clos, on peut maintenant entrer dans le vif du sujet.

DÉFINITION 2.1.5. Soit $\omega = f(z, w)dz \wedge dw$ une 2-forme méromorphe non nulle sur X . Le **diviseur de ω** , noté $\text{div}(\omega)$, est le diviseur de f .

Remarque 2.1.6. La définition précédente a bien un sens car $\text{div}(\omega)$ est invariant par changement de coordonnées locales holomorphes.

DÉFINITION 2.1.7. Un **diviseur canonique** de X est un diviseur de X de la forme $\text{div}(\omega)$ où ω est une 2-forme méromorphe non nulle sur X .

Remarque 2.1.8. La classe d'équivalence d'un diviseur canonique de X pour la relation $\sim$ est bien définie et est appelée la **classe canonique** de ce diviseur. Cette dernière est traditionnellement notée K_X , ou plus simplement K . Par abus de langage, on confondra la classe canonique avec un diviseur canonique.

Proposition 2.1.9. Soient ω_1 et ω_2 deux 2-formes méromorphes sur X telles que $\omega_1 \neq 0$.

Alors il existe une fonction méromorphe f sur X telle que $\omega_2 = f\omega_1$.

En tenant compte de la proposition 2.1.9, on peut directement énoncer le corollaire ci-dessous.

Corollaire 2.1.10. Soient K_1 et K_2 deux diviseurs canoniques de X . Alors K_1 et K_2 sont linéairement équivalents.

2.2 La suite des plurigenres

Notation 2.2.1. Soit p un entier naturel inférieur ou égal à 2. On note Ω_X^p le faisceau sur X des p -formes holomorphes. En d'autres termes, si Ω_X désigne le faisceau sur X des 1-formes holomorphes, alors

$$\Omega_X^p = \bigwedge^p \Omega_X.$$

Parfois, certains auteurs comme [Har, II.8] désignent par ω_X le faisceau Ω_X^2 , appelé **faisceau canonique** de X .

Notation 2.2.2. Soit D un diviseur de X . On note $\mathcal{O}_X(D)$ le faisceau sur X défini pour tout ouvert U de X par :

$$H^0(U, \mathcal{O}_X(D)) = \mathcal{O}_X(D)(U) = \{f \in \mathcal{M}(U) \setminus \{0\} \mid \operatorname{div}(f) + D|_U \geq 0\} \cup \{0\}.$$

En particulier, on a

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = \mathcal{O}_X(D)(X) = \{f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\} \mid \operatorname{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

De plus, le faisceau $\mathcal{O}_X(0)$ sera plus sobrement noté $\mathcal{O}_X$.

DÉFINITION 2.2.3. Le **genre géométrique** de X est l'entier naturel, noté $p_g(X)$ (ou plus simplement p_g), défini par :

$$p_g(X) = \dim(H^0(X, \Omega_X^2)).$$

Proposition 2.2.4. Soient ω une 2-forme méromorphe non nulle sur X puis $K = \operatorname{div}(\omega)$.

L'application $\mu_\omega : H^0(X, \mathcal{O}_X(K)) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^2)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$f \mapsto f\omega$$

Remarque 2.2.5. Immédiatement, la proposition précédente fournit l'égalité $p_g(X) = \dim(H^0(X, \mathcal{O}_X(K)))$.

En extrapolant la remarque précédente, on arrive à la définition suivante.

DÉFINITION 2.2.6. Soit K un diviseur canonique de X . Soit n un entier naturel.

Le $n^{\text{ème}}$ **plurigenre** de X est l'entier naturel, noté $P_n(X)$ (ou plus simplement P_n), défini par :

$$P_n(X) = \dim(H^0(X, \mathcal{O}_X(nK))).$$

Remarque 2.2.7. On a $P_0(X) = 1$ (car toute fonction holomorphe d'une variété complexe compacte connexe vers $\mathbb{C}$ est constante) et $P_1(X)$ n'est rien d'autre que le genre géométrique de X .

Remarque 2.2.8. On peut observer que les plurigenres ne dépendent pas du choix du diviseur canonique. En effet, soient K_1 et K_2 deux diviseurs canoniques de X et $n \in \mathbb{N}$. Alors $K_1 \sim K_2$ (corollaire 2.1.10) et donc il existe $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ telle que $K_1 = \operatorname{div}(f) + K_2$. Puis

$$nK_1 = n \operatorname{div}(f) + nK_2 = \operatorname{div}(\underbrace{f \times \dots \times f}_{n \text{ fois}}) + nK_2$$

ou encore $nK_1 \sim nK_2$ et donc ces deux diviseurs définissent la même classe dans $\operatorname{Cl}(X)$. D'après [Har, corollaire II.6.16], on obtient $\mathcal{O}_X(nK_1) \simeq \mathcal{O}_X(nK_2)$ puis $H^0(X, \mathcal{O}_X(nK_1)) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(nK_2))$.

2.3 La caractéristique d'Euler, l'irrégularité et le genre arithmétique

DÉFINITION 2.3.1. La **caractéristique d'Euler** de $\mathcal{O}_X$ est l'entier relatif, noté $\chi(\mathcal{O}_X)$, défini par :

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \dim(H^0(X, \mathcal{O}_X)) - \dim(H^1(X, \mathcal{O}_X)) + \dim(H^2(X, \mathcal{O}_X)).$$

DÉFINITION 2.3.2. L'**irrégularité** de X est l'entier naturel, noté $q(X)$ (ou plus simplement q), défini par :

$$q(X) = \dim(H^1(X, \mathcal{O}_X)).$$

DÉFINITION 2.3.3. Le **genre arithmétique** de X est l'entier relatif, noté $p_a(X)$ (ou plus simplement p_a), défini par :

$$p_a(X) = \chi(\mathcal{O}_X) - 1.$$

Remarque 2.3.4. Il est possible d'exhiber une relation entre $q(X)$, $p_g(X)$ et $p_a(X)$ et même de comparer $p_a(X)$ et $p_g(X)$. En effet, grâce à la dualité de Serre (consulter en particulier [Har, corollaire III.7.13] pour plus de détails), on a

$$p_a(X) = \chi(\mathcal{O}_X) - 1 = 1 - q(X) + p_g(X) - 1 = p_g(X) - q(X)$$

et donc

$$q(X) = p_g(X) - p_a(X).$$

En particulier, $p_a(X) \leq p_g(X)$, ce qui n'était pas trivial au départ.

La proposition suivante montre que la majorité des concepts introduits sont effectivement des invariants birationnels.

Proposition 2.3.5. Si X et Y sont deux surfaces algébriques birationnelles, alors

$$q(X) = q(Y), \quad p_g(X) = p_g(Y), \quad \chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_Y) \quad \text{et} \quad p_a(X) = p_a(Y).$$

3 La dimension de Kodaira

3.1 Définition et propriétés générales

Notation 3.1.1. Soit K un diviseur canonique de X . On note $R(X, K)$ l'anneau suivant :

$$R(X, K) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} H^0(X, \mathcal{O}_X(nK)).$$

DÉFINITION 3.1.2. Soit K un diviseur canonique de X . La **dimension de Kodaira** de X est l'élément de $\{-\infty, 0, 1, 2\}$, noté $\kappa(X)$, défini par :

$$\kappa(X) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(X) = 0 \\ \text{trdeg}_{\mathbb{C}}(\text{Frac}(R(X, K))) - 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Remarque 3.1.3. En vertu de la remarque 2.2.8, la dimension de Kodaira ne dépend pas du choix du diviseur canonique.

Proposition 3.1.4. On suppose que $\kappa(X) \geq 0$. Alors

$$P_n(X) \underset{n \rightarrow +\infty}{\asymp} n^{\kappa(X)}.$$

Remarque 3.1.5. Dans le cas où la suite $(P_n(X))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est non nulle, la dimension de Kodaira de X peut aussi être perçue comme étant l'entier minimal κ tel que $P_n(X) \underset{n \rightarrow +\infty}{\asymp} n^{\kappa}$. Ainsi, $\kappa(X)$ mesure la vitesse de croissance des plurigenres $P_n(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Proposition 3.1.6. Soient X et Y deux surfaces algébriques birationnelles. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n(X) = P_n(Y) \quad \text{et} \quad \kappa(X) = \kappa(Y).$$

3.2 Classification des surfaces algébriques

DÉFINITION 3.2.1. On dit que X est **minimale** si tout morphisme birationnel de X vers Y , où Y est une surface algébrique, est un isomorphisme.

DÉFINITION 3.2.2. Un **modèle minimal** de X est une surface algébrique qui est minimale et birationnelle à X .

Comme on l'a vu dans la proposition 3.1.6, la dimension de Kodaira est un invariant birationnel et constitue un premier point de départ dans la classification birationnelle des surfaces algébriques. Toutefois, on va voir que dans certains cas, cet invariant ne suffit pas et qu'il en faut davantage.

Les détails complets de la classification birationnelle des surfaces algébriques dépassent largement le cadre de cet exposé en termes de longueur et de difficulté. On se contentera seulement de la décrire. De plus, on ne va analyser que les modèles minimaux des surfaces algébriques. On va donc supposer ici que X est minimale.

1^{er} cas. Supposons que $\kappa(X) = -\infty$. Ici, la seule connaissance de la dimension de Kodaira ne suffit pas, il faut invoquer d'autres invariants. Deux cas de figure se présentent.

1^{er} sous-cas. X est une **surface rationnelle**, c'est-à-dire birationnellement équivalente à $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Dans ce cas, on obtient les égalités $p_g(X) = p_a(X) = q(X) = 0$.

2^{ème} sous-cas. X est une **surface réglée** de genre g , c'est-à-dire qu'il existe une courbe lisse de genre g et un morphisme surjectif π de X sur C admettant une section et dont toutes les fibres sont isomorphes à $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Dans ce cas, $p_g(X) = 0$, $p_a(X) = -g$ et $q(X) = g$.

Mentionnons un critère remarquable permettant de caractériser les surfaces rationnelles.

Proposition 3.2.3 (théorème de Castelnuovo). La surface X est rationnelle si et seulement si $P_2(X) = p_a(X) = 0$.

2^{ème} cas. Supposons que $\kappa(X) = 0$. De nouveau, il en faut plus pour classer birationnellement toutes les surfaces algébriques de dimension de Kodaira nulle.

1^{er} sous-cas. X est une **surface K3**, c'est-à-dire que $K = 0$ et $q(X) = 0$. Dans ce cas, $p_a(X) = p_g(X) = 1$.

Remarque 3.2.4. Ce nom quelque peu saugrenu a été choisi en 1958 par André Weil afin de rendre hommage à Kähler, Kodaira et Kummer, mais aussi à la montagne K2 située au Pakistan.

2^{ème} sous-cas. X est une **surface d'Enriques**, c'est-à-dire que $p_a(X) = p_g(X) = 0$ et $2K = 0$.

3^{ème} sous-cas. X est une **surface abélienne**. Dans ce cas, $p_a(X) = -1$ et $p_g(X) = 1$.

4^{ème} sous-cas. X est une **surface hyperelliptique**, c'est-à-dire que $X = (E \times F)/G$ où E et F sont des courbes elliptiques et G est un groupe de translations de F agissant sur E et $p_g(X) = 0$. Dans ce cas, $p_a(X) = -1$.

3^{ème} cas. Supposons que $\kappa(X) = 1$. Contrairement aux deux cas précédents, on n'a pas besoin d'invariants numériques supplémentaires. Néanmoins, la définition suivante est indispensable pour cerner efficacement le type de surface auquel on a affaire.

DÉFINITION 3.2.5. Une **fibration elliptique** de X est une application f holomorphe de X vers C , où C est une courbe, telle que presque toutes les fibres de f soient des courbes lisses de genre 1.

Dans ce cas, si $\kappa(X) = 1$, alors X est une **surface elliptique**, c'est-à-dire une surface munie d'une fibration elliptique.

4^{ème} cas. Supposons que $\kappa(X) = 2$. Alors on dit que X est une **surface de type général**.

Ainsi, la classification birationnelle des surfaces algébriques s'énonce comme suit.

Théorème 3.2.6 (classification de Kodaira-Enriques).

- ❶ Si $\kappa(X) = -\infty$, alors un modèle minimal de X est ou bien une surface rationnelle, ou bien une surface réglée.
- ❷ Si $\kappa(X) = 0$, alors un modèle minimal de X est ou bien une surface K3, ou bien une surface d'Enriques, ou bien une surface abélienne, ou bien une surface hyperelliptique.
- ❸ Si $\kappa(X) = 1$, alors un modèle minimal de X est une surface elliptique.
- ❹ Si $\kappa(X) = 2$, alors un modèle minimal de X est une surface de type général.

Concernant les invariants numériques, on peut regrouper au sein d'un tableau les résultats essentiels.

Modèle minimal de X	$\kappa(X)$	$p_g(X)$	$p_a(X)$	$q(X)$	$\chi(\mathcal{O}_X)$
Surface rationnelle	$-\infty$	0	0	0	1
Surface réglée de genre g	$-\infty$	0	$-g$	g	$1 - g$
Surface K3	0	1	1	0	2
Surface d'Enriques	0	0	0	0	1
Surface abélienne	0	1	-1	2	0
Surface hyperelliptique	0	0	-1	1	0
Surface elliptique	1				
Surface de type général	2				

4 D'autres invariants numériques : vers le diamant de Hodge

4.1 Nombres de Betti et nombre d'Euler

DÉFINITION 4.1.1. Soit $i \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$. Le $i^{\text{ème}}$ **nombre de Betti** de X est l'entier naturel, noté $b_i(X)$ (ou plus simplement b_i), défini par :

$$b_i(X) = \text{rang}(H^i(X, \mathbb{Z})).$$

Proposition 4.1.2.

$$\forall i \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, b_i(X) = \dim_{\mathbb{R}}(H^i(X, \mathbb{R})) = \dim_{\mathbb{C}}(H^i(X, \mathbb{C})).$$

DÉFINITION 4.1.3. Le **nombre d'Euler** de X , noté $e(X)$ (ou plus simplement e), est l'entier relatif défini par :

$$e(X) = \sum_{i=0}^4 (-1)^i b_i(X).$$

Remarque 4.1.4. Ces nombres sont des invariants topologiques, mais pas birationnels.

4.2 Quelques rudiments de théorie de Hodge

DÉFINITION 4.2.1. Les **nombres de Hodge** de X sont les entiers naturels, notés $h^{p,q}(X)$ (ou plus simplement $h^{p,q}$), $0 \leq p, q \leq 2$, définis par :

$$\forall (p, q) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket^2, h^{p,q}(X) = \dim(H^q(X, \Omega_X^p)).$$

Remarque 4.2.2. Les nombres de Hodge contiennent certains invariants numériques comme le genre géométrique ou l'irrégularité. En effet, $p_g(X) = h^{2,0}(X)$ et $q(X) = h^{0,1}(X)$.

Remarque 4.2.3. Les nombres de Hodge sont des invariants biréguliers, mais généralement pas birationnels.

Proposition 4.2.4.

❶ $\forall (p, q) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket^2, h^{p,q}(X) = h^{q,p}(X) = h^{2-p, 2-q}(X) = h^{2-q, 2-p}(X).$

❷ $\forall i \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, b_i(X) = \sum_{\substack{(p,q) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket^2 \\ p+q=i}} h^{p,q}(X).$

❸ $b_0(X) = b_4(X) = 1.$

Remarque 4.2.5. Il est d'usage de disposer les nombres de Hodge de sorte à former un quadrilatère que l'on appelle plus poétiquement le **diamant de Hodge**.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & h^{0,0} & & \\
 & h^{1,0} & & h^{0,1} & \\
 h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} \\
 & h^{2,1} & & h^{1,2} & \\
 & & h^{2,2} & &
 \end{array}$$

En tenant compte de la proposition 4.2.4, on observe que la connaissance du quart supérieur gauche du diamant de Hodge suffit à déterminer entièrement ce dernier. Voici donc le diamant de Hodge d'une surface algébrique quelconque X .

$$\begin{array}{ccccc}
& & 1 & & \\
& q & & q & \\
p_g & & h^{1,1} & & p_g \\
& q & & q & \\
& & 1 & &
\end{array}$$

L'avantage de cette représentation est qu'elle permet en un simple coup d'œil de lire les invariants numériques susnommés. Si on numérote les lignes du diamant de 1 à 5, alors la somme des nombres situés sur la $i^{\text{ème}}$ ligne fournit le $(i-1)^{\text{ème}}$ nombre de Betti (points ❷ et ❸ de la proposition 4.2.4) et la somme alternée des lignes permet de retrouver le nombre d'Euler. Ainsi,

$$b_1 = b_3 = 2q \text{ et } b_2 = 2p_g + h^{1,1}$$

et aussi

$$e = 2 + 2p_g + h^{1,1} - 4q.$$

On obtient donc des relations entre des objets de nature algébrique (genre géométrique et irrégularité) et des objets de nature topologique (nombres de Betti et nombre d'Euler).

Voici les diamants de Hodge d'une surface K3 et d'une surface d'Enriques. On pourra se référer à [Mir] pour voir à quoi ressemblent les diamants de Hodge pour d'autres classes de surfaces algébriques.

Exemple 4.2.6. Supposons que X est une surface K3. On sait déjà que $q = 0$ et $p_g = 1$. On peut montrer que $h^{1,1} = 20$. Toutefois, le calcul de $h^{1,1}$ est un peu plus compliqué car les arguments reposent sur l'utilisation de la formule de Hirzebruch-Riemann-Roch et des classes de Chern (voir [Huy, chapitre 1 paragraphe 2.4]). En découle ainsi le diamant de Hodge suivant.

$$\begin{array}{ccccc}
& & 1 & & \\
& 0 & & 0 & \\
1 & & 20 & & 1 \\
& 0 & & 0 & \\
& & 1 & &
\end{array}$$

Exemple 4.2.7. Supposons que X est une surface d'Enriques. Tout d'abord, $q = p_g = 0$ puis $b_2 = 2p_g + h^{1,1} = h^{1,1}$. Ensuite, on peut montrer que $b_2 = 10$. D'où le diamant de Hodge ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccc}
& & 1 & & \\
& 0 & & 0 & \\
0 & & 10 & & 0 \\
& 0 & & 0 & \\
& & 1 & &
\end{array}$$

Références

- [Har] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer, 1977.
- [Huy] Daniel Huybrechts. *Lectures on K3 Surfaces*. Cambridge University Press, 2016.
- [Mir] Rick Miranda. *An Overview of Algebraic Surfaces*. <https://sertoz.bilkent.edu.tr/depo/Summer%20School%201995/Miranda.pdf>. 1995.
- [Per] Arvid Perego. *Introduction to algebraic surfaces*. <https://fr.scribd.com/document/561613360/corso-Perego-complex-algebraic-surface-note>. 2009.